CHUYÊN ĐỀ 11: CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1: Áp dụng tính chất các đường đồng quy trong tam giác.

Phương pháp 2: Chứng minh các đường thẳng cùng đi qua một điểm: Ta chỉ ra hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm và chứng minh đường thẳng cũng đi qua điểm đó.

Phương pháp 3: Dùng định lý đảo của định lý Talet.

Phương pháp 4: Định lý Lyness mở rộng (Bổ đề Sawayama): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M $\in$ BC. Một đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh MA và MC tại E và F đồng thời tiếp xúc với cả đường tròn (O) tại K. Khi đó ta có tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF.

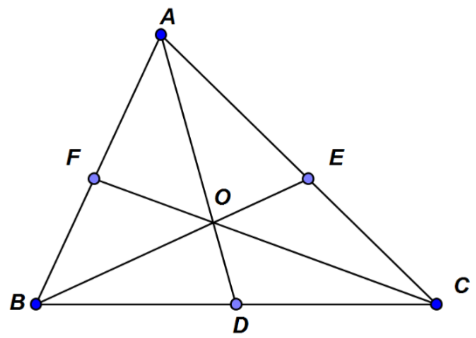
Định lý Pascal: Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Khi đó các giao điểm của các cặp cạnh AB và DE, BC và EF, CD và FA thẳng hàng.

Phương pháp 6:

Định lý CEVA: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E và F lần lượt nằm trên các cạnh BC, AC, AB.

Định lý phát biểu rằng các đường thẳng AD, BE và CF là những đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$



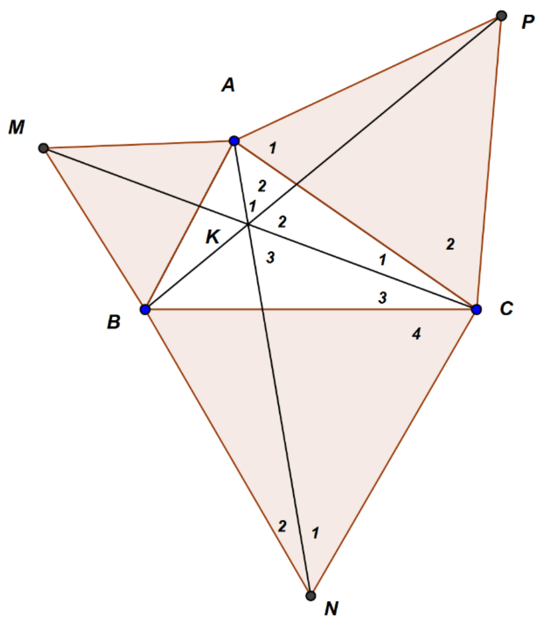
2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC dựng tam giác đều MAB, NBC, PAC thuộc miền ngoài tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) MC = NA = PB

b) $\left(\overline{AM},\overline{MC}\right)=\left(\overline{MC},\overline{BP}\right)=\left(\overline{BP}.\overline{NA}\right)=60^0$

c) MC, NA, PB đồng quy



Chứng minh

a) Xét Δ ABN và Δ MBC, có:

AB = MB;

BC = BN (các cạnh của tam giác đều)

$ABN = MBC$ (cùng bằng 60^0 + ABC)

Suy ra Δ ABN = Δ MBC (c.g.c)

Suy ra AN = MC (*)

Tương tự: Δ ABP = Δ AMC (c.g.c)

AB = AM;

BC = BN (các cạnh của tam giác đều)

$BAP = MAC$ (cùng bằng 60^0 + BAC)

Suy ra BP = MC (**)

Từ (*) và (**) ta có: AN = MC = BP (đpcm).

b)

Trong Δ APC, có: $A_1 + C_2 + P_1 + P_2 = 180^0$ mà $P_1 = C_1$ P = C

Trong Δ PCK, có: $C_1 + C_2 + P_2 + K_2 = 180^0$

Suy ra $60^0 + \left(C_1 + P_2\right) + K_2 = 180^0 \Rightarrow K_2 = 60^0$ (1)

Tương tự: Δ ABN = Δ MBC

Suy ra $N_1 = C_3$ mà $N_1 + N_2 = 60^0$

Suy ra $N_2 + C_3 = 60^0$ mà $C_4 = 60^0$

Suy ra Δ NKC có $N_2 + C_3 + C_4 + K_3 = 180^0 0$

Suy ra $K_3 = 60^0$ (2)

Tương tự: Δ ACN = Δ PCB

Suy ra $P_2 = A_2$ mà $P_1 + P_2 = 60^0$

Suy ra $P_1 + A_2 = 60^0$ mà $A_1 = 60^0$

Suy ra Trong Δ AKP, có: $K_1 = 60^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh

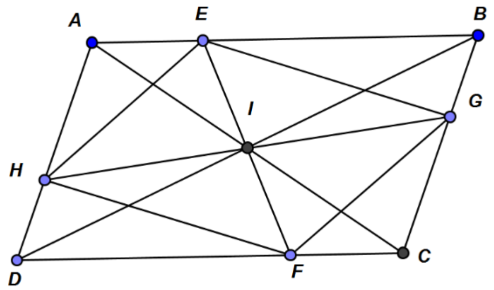
c) Giả sử $MC \cap BP = K$, ta chứng minh cho A, K, N thẳng hàng.

Theo chứng minh trên ta có: $K_1 = 60^0, K_2 = 60^0, K_3 = 60^0 \Rightarrow K_1 + K_2 + K_3 = 180^0$

Suy ra A,K,N thẳng hàng

Vậy AN, MC, BP đồng quy (đpcm)

Bài tập 2: Cho hình bình hành ABCD. Trên AB và CD lấy 2 điểm E và F sao cho AE = CF. Trên AD và BC lấy H và G sao cho DH = BG.



a) Chứng minh: Tứ giác EGFH là hình bình hành

b) Chứng minh: AC, BD, EF, GH cắt nhau tại 1 điểm.

Chứng minh

a) Xét Δ DHF và Δ BGE, ta có:

DH = BG

$HDF = GBE$ (vì ABCD là hình bình hành)

DF = BE (vì AE = CF)

Suy ra Δ DHF = Δ BGE

Suy ra HF = EG (1)

Mặt khác, ta có:

$DHG = BGH$ và $DHF = BGE \Rightarrow FCG = EGH$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: Tứ giác EGFH là hình bình hành.

b) (Theo câu a)

Suy ra tứ giác EGFH là hình bình hành

Gọi I là giao điểm của 2 đường chéo HG và EF (của hình bình hành EGFH)

Ta lại có: Tứ giác AGCH là hình bình hành (AH // CG và AH = CG)

Suy ra giao của 2 đường chéo HG và AC là I (I trung điểm HG)

Tương tự, ta có: Hình bình hành HBGD có giao điểm của 2 đường chéo là HG và BD tại I (I là trung điểm HG)

Suy ra HG, EF, AC, BD cắt nhau tại điểm I (cũng là điểm duy nhất).

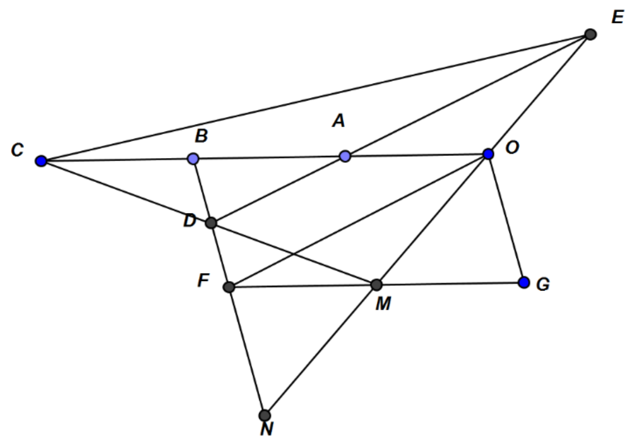
Bài tập 3: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại O. Trên d_1 lần lượt lấy ba điểm phân biệt A, B, C khác O sao cho OA = AB = BC. Trên d_2 lần lượt lấy ba điểm E, M, N khác O sao cho OE = OM = MN. Chứng minh rằng ba đường thẳng AE, BN và CM đồng quy.

Chứng minh

Gọi D là giao điểm của BN và CM.

Qua M kẻ đường thẳng song song với OC cắt BC tại F.

Qua O kẻ đường thẳng song song với BN cắt MF tại G.



Xét Δ FBO và Δ OGF, ta có:

$BOF = GFO$ (so le trong)

OF là cạnh chung

$BFO = GOF$ (so le trong)

Suy ra Δ FBO = Δ OGF (g-c-g).

Suy ra FG = BO (1)

Xét Δ NFM và Δ OGM, ta có:

$GOM = FNM$

MO = MN

$OMG = NMF$ (đối đỉnh)

Suy ra Δ NFM = Δ OGM.

Suy ra MF = MG (2)

Từ (1) và (2), suy ra: MF = OA = AB = BC.

Sử dụng kết quả vừa tìm được này kết hợp:

$DCB = DMF$ (so le trong) và $DBC = DFM$ (so le trong)

Suy ra: Δ DBC = Δ DFM (g-c-g).

Do đó: DC = DM

hay D là trung điểm của CM (3)

Xét Δ CEM, ta có:

CO là trung tuyến ứng với cạnh ME (do OE = OM) nên $CA = \frac{2}{3}CO$

Suy ra A là trọng tâm của Δ CEM.

Suy ra AE đi qua trung điểm của cạnh CM. (4)

Từ (3) và (4), ta suy ra AE đi qua D.

Vậy BN,CM và AE đồng quy tại D.

Bài tập 4: Cho Δ ABC, các đường cao AD, BE, CF của tam giác đồng quy tại H. Gọi I là trung điểm của HC.

a) Chứng minh BCEF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp Δ DEF và DIEF là tứ giác nội tiếp 1 đường tròn.

c) Về phía ngoài Δ ABC dựng các Δ ABM và Δ CAN sao cho chúng là các tam giác vuông cân tại các đỉnh B và C tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BN, CM đồng quy.

Chứng minh

a) HS tự làm.

b) Ta dễ dàng chứng minh được các tứ giác AEHF, AEDB nội tiếp trong đường tròn.

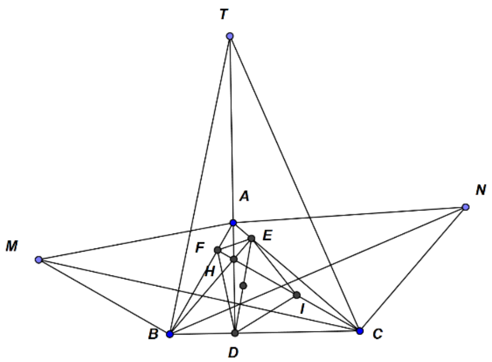
Khi đó, ta có:

$FAH = FEH$ (cùng chắn FH) và $FAH = BAD$

$BAD = BED$ (cùng chắn BD) và $BED = HED$

Suy ra $FEH = HED$

Suy ra HE là tia phân giác của FED.



Tương tự, ta có:

HF là tia phân giác của EFD.

HD là tia phân giác của EDF.

Suy ra H là giao điểm của 3 đường phân giác trong của Δ DEF.

Vậy H là tâm của đường trong nội tiếp Δ DEF.

* Theo chứng minh ở trên, ta có:

$FED = 2FAD$ và $FAD = FCD$ (HS tự chứng minh tứ giác ACDF nội tiếp)

$HID = 2FCD$ (góc ngoài bằng tổng của 2 góc trong không kề)

Suy ra $FED = 2FAD = 2FCD = HID = FID$

Hay $FED = FID$

Suy ra tứ giác EIDF nội tiếp.

c) Trên tia đối tia AD, lấy T sao cho AT = BC.

$MBC = 90^0 + ABC = TAB$

Suy ra

Δ MBC = Δ BAT (c - g - c)

Suy ra $BTD = BCM$

Suy ra CM $\perp$ TB

Tương tự, ta có: BN $\perp$ TC.

Mà TD $\perp$ BC

Vậy TD, CM, BN đồng quy (3 đường cao của Δ TBC)

Bài tập 5: Cho tứ giác ABCD, AD, BC không song song, nội tiếp đường tròn (O). P là giao điểm của AC và BD. Đường tròn (O_1) tiếp xúc với các đoạn PA, PB và tiếp xúc trong với (O) tại E. Đường tròn (O_2) tiếp xúc với các đoạn PC, PD và tiếp xúc trong với (O) tại F. Chứng minh rằng AD, BC, EF đồng quy.

Chứng minh

Giả sử (O_2) tiếp xúc PB, PC tại X, Y và tiếp xúc (O) tại F.

Theo bổ đề Sawayama (định lí Lyness mở rộng) ta có XY đi qua H, K (với H,K là tâm nội tiếp các Δ ADC, Δ BDC.

Gọi Z, T là giao điểm của HK trên AD, BC. Gọi M, N, P, Q là trung điểm các cung AD, BD, AC, BC của (O). Vì (O2) tiếp xúc AC, BD nên F, X, N và F, Y, P thẳng hàng.

Ta sẽ chứng minh: M, Z, F thẳng hàng.

Thật vậy: Gọi Z′ là giao của FM và AD. AN giao BM tại S. Gọi R là trung điểm cung CD.

Theo định lí Pascan cho lục giác MFNADB ta có S, Z′, X thẳng hàng.

Tiếp tục với lục giác NARBMC ta có H, K, S thẳng hàng.

Mà H, K, X thẳng hàng, nên ta có Z′, X, H, K thẳng hàng hay Z′ trùng Z.

Tương tự, ta có: F, T, Q thẳng hàng.

Gọi (O3) là đường tròn tiếp xúc AD, BC và tiếp xúc (O) tại cung nhỏ DC.

Ta sẽ chứng minh (O_3) là (ZFT).

Thật vậy, gọi Z", T" là tiếp điểm trên AD, BC của (O_3) thì theo bổ đề Sawayama, ta cũng có Z", T", H, K thẳng hàng hay Z", T" trùng Z, T.

Mà MZ và NT cắt nhau tại F nên ta có ngay ZFT chính là (O_3).

Từ đó, ta quy bài toán về phát biểu đơn giản hơn như sau: (O_3) tiếp xúc AD, BC và tiếp xúc cung nhỏ CD tại F.

Tương tự có E.

Khi đó AD, BC, EF đồng quy.

Bài tập 6: Chứng minh dựa vào định lý CEVA.

Định lý CEVA: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E và F lần lượt nằm trên các cạnh BC, AC, AB.

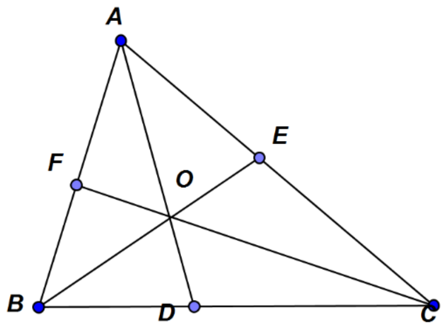
Định lý phát biểu rằng các đường thẳng AD, BE và CF là những đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi:

$$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1$$

Chứng minh

Giả sử AD, BE và CF đồng qui tại một điểm O nào đó (trong hay ngoài tam giác). Do Δ BOD và Δ COD có chung chiều cao (độ dài của đường cao), ta có:

$$\frac{S_{BOD}}{S_{COD}}=\frac{BD}{DC}$$



Tương tự

$$\frac{S_{BAD}}{S_{CAD}}=\frac{BD}{DC}$$

Suy ra

$$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{BAD}-S_{BOD}}{S_{CAD}-S_{COD}}=\frac{S_{ABO}}{S_{CAO}}$$

Tương tự

$$\frac{CE}{EA}=\frac{S_{BCO}}{S_{ABO}}$$

và

$$\frac{AF}{FB}=\frac{S_{CAO}}{S_{BCO}}$$

Nhân ba đẳng thức trên cho ta:

$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1$ (điều phải chứng minh).

Ngược lại, giả sử rằng ta đã có những điểm D, E và F thỏa mãn đẳng thức. Gọi giao điểm của AD và BE là O, và gọi giao điểm của CO và AB là F'. Theo chứng minh trên

$$\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

Kết hợp với đẳng thức trên, ta nhận được: $\frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}$

Thêm 1 vào mỗi vế và chú ý rằng AF" + F"B = AF + FB = AB, ta có:

$$\frac{AB}{F'B}=\frac{AB}{FB}$$

Do đó F"B = FB, vậy F và F" trùng nhau . Vì vậy AD, BE và CF = CF" đồng qui tại O, và định lí đã được chứng minh (là đúng theo cả hai chiều).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC dựng các tam giác đều MAB, NBC, PAC thuộc miền ngoài tam giác ABC. Chứng minh MC, NA, PB đồng quy.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC dựng các tam giác đều MAB, NBC, PAC và có tâm lần lượt là O_1, O_2, O_3. Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp 3 tam giác đều trên đều đồng quy tại một điểm.

Bài tập 3: Gọi A', B', C' là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp Δ ABC với các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng: AA', BB', CC' đồng quy.

Hướng dẫn

Chứng minh

$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1\Leftrightarrow$ AA', BB', CC' đồng quy

Bài tập 4: Cho hình thang ABCD (AB > CD). Gọi E là giao điểm hai cạnh bên AD và BC; F là trung điểm của AB. Chứng minh rằng: AC, BD, CF đồng quy.

Bài tập 5: Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AH, BK, CL cắt nhau tại I. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của IA, IB, IC. Chứng minh PD, QE, RF đồng quy. Gọi J là điểm đồng quy, chứng minh I là trung điểm của mỗi đường.

Hướng dẫn

Chứng minh PEDQ, PRDF là hình chữ nhật

Suy ra PD, QE, RF là đường chéo của 2 hình chữ nhật đó

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 6: Cho Δ ABC nội tiếp đường tròn (O) và có H là trực tâm. Gọi A', B', C' là điểm đối xứng của H qua BC, CA, AB. Qua H, vẽ đường thẳng d bất kì. Chứng minh rằng: Các đường thẳng đối xứng của d qua các cạnh của Δ ABC đồng quy tại một điểm trên (O).

Hướng dẫn

Gọi d_1, d_2, d_3 là các đường thẳng đối xứng của d qua các cạnh của Δ ABC.

Gọi I là giao của d_1 và d_2

Chứng minh tứ giác A'B'C'I là tứ giác nội tiếp. Suy ra A'B'C'I là nội tiếp (O).

Chứng minh I thuộc d_3.